Artículo Original

DOI: 10.22507/jet.v6n1a1

Medidas de riesgo en modelos de inventario: ¿determinismo o incertidumbre en la producción sustentable?[1]

David Alberto García Arango[2], Elkin Darío Aguirre Mesa[3], Dany Esteban Gallego Quiceno[4].

Artículo recibido: 26 de septiembre de 2016 / Artículo aceptado: 12 de diciembre de 2016

RESUMEN

Los modelos de inventario han constituido gran parte de las ocupaciones de las matemáticas aplicadas a la optimización, el hecho de considerar costos de *stock* o penalizaciones relacionadas con la incertidumbre hacen necesario plantear estudios respecto al tratamiento del riesgo. El presente artículo analiza elementos relacionados con algunos modelos de inventario desde su estructura, finalidad y política de toma de decisiones haciendo hincapié en el tratamiento de casos no deterministas donde se tiene incertidumbre en demandas aleatorias con densidad; φ lo anterior utilizando una metodología cuantitativa y teniendo como referencia fundamental la caracterización de la estructura de un problema *well-posed* que responda a una política óptima y a la adecuación de una medida coherente de riesgo. Se presentan los presupuestos básicos teóricos para la comprensión de la temática, así mismo, se identifican y conceptualizan algunos tópicos relacionados con la teoría de inventarios a la luz de los objetivos y la estructura de control de inventarios mencionando algunos modelos de ellos; posteriormente se hace una construcción teórica en el tratamiento de la optimización de modelos de inventario desde la incertidumbre en analogía con los modelos deterministas, para así establecer relaciones entre la política de toma de decisiones para modelos de inventarios y el orden estocástico usual, finalmente, se establecen conclusiones respecto a la importancia del planteamiento de la política en el marco de las medidas de riesgo para escenarios

1 Artículo original derivado del proyecto "Optimización bajo Incertidumbre", realizado entre febrero de 2015 y septiembre de 2015, financiado por la Corporación Universitaria Americana. Producto derivado de la Tesis de Maestría en Matemáticas Aplicadas: "Modelo de inventario AHM utilizando CVaR". De David Alberto García Arango. Universidad EAFIT.

2 Licenciado en Matemáticas y Física, Magíster en Matemáticas Aplicadas, docente de la Facultad de Ingeniería de la Corporación Universitaria Americana, dagarcia@coruniamericana.edu.co

3 Ingeniero de Sistemas, Magíster en Gestión de la Informática Educativa, docente de la Facultad de Ingeniería de la Corporación Universitaria Americana, eaguirre@americana.edu.co

4 Licenciado en Matemáticas y Física, Magíster en Educación, Vicerrector académico de la Corporación Universitaria Americana, dgallego@coruniamericana.edu.co

de incertidumbre proponiendo un tratamiento para los sistemas productivos.

Palabras clave: optimización, incertidumbre, inventarios, modelos, demanda.

Risk measures in inventory models: determinism or uncertainty in sustainable production?

ABSTRACT

Inventory models have been the focus of mathematics applied to optimization; the fact of considering stock costs or penalties related to uncertainty makes it necessary to carry out studies regarding the treatment of risk. The present article aims to analyze elements related to some inventory models from their structure, purpose and decision making policy, emphasizing the treatment of non-deterministic cases where there is uncertainty in random demands with density φ.This is possible using a quantitative methodology and having as fundamental reference the characterization of the structure of a well-posed problem that responds to an optimal policy and to the adequacy of a coherent risk measure. The basic theoretical assumptions are presented for the understanding of the theme. Likewise, some topics related to inventory theory are identified and conceptualized, based on the theory's objectives and inventory control structure, mentioning some inventory models. Besides, a theoretical construction is made in the treatment of inventory model optimization from uncertainty, in an analogy with deterministic models, in order to establish relationships between the decision-making policy for inventory models and the usual stochastic order. Finally, conclusions are established regarding the importance of the policy approach in the framework of risk measures for uncertainty scenarios by proposing a treatment for productive systems.

Key words: optimization, uncertainty, inventories, models, demand.

Medidas de risco em modelos de inventário: determinismo ou incerteza na produção sustentável?

RESUMO

Os modelos de inventário há constituído grande parte das ocupações das matemáticas aplicadas à optimização, o fato de considerar custos de *stock* ou penalizações relacionadas com a incerteza fazem necessário expor estudos com respeito ao tratamento do risco. O presente artigo analisa elementos relacionados com alguns modelos de inventário desde sua estrutura, finalidade e política de toma de decisões fazendo hincapié no tratamento de casos não determinista onde se tem incerteza em demandas aleatórias com densidade φ; o anterior utilizando uma metodologia quantitativa e tendo como referência fundamental a caracterização da estrutura de um problema *well-posed* que responda a uma política ótima e à adequação de uma medida coerente de risco. Se apresentam os orçamentos básicos teóricos para a compreensão da temática, assim mesmo, se identificam e conceitualizam alguns tópicos relacionados com a teoria de inventários à luz dos objetivos e a estrutura de controle de inventários mencionando alguns modelos deles; posteriormente se faz uma construção teórica no tratamento da otimização de modelos de inventário desde a incerteza na analogia com os modelos deterministas, para assim estabelecer relações entre a política de toma de decisões para modelos de inventários e a ordem estocástico usual, finalmente, se estabelecem conclusões com respeito à importância da abordagem da política no marco das medidas de risco para cenários de incerteza propondo um tratamento para os sistemas produtivos.

Palavras chave: otimização, incerteza, inventários, modelos, demanda.

INTRODUCCIÓN

El problema de optimización consiste básicamente en minimizar o maximizar una determinada cantidad que depende de varias variables en un contexto determinado y bajo diversas restricciones que delimitan las variables. Se sabe, además, que si bien es cierto que en algunas ocasiones se puede tomar una decisión inmediata en cuanto al valor óptimo de la cantidad, dentro de las soluciones factibles según las restricciones del problema (optimización determinística), también es cierto que en otras ocasiones ese valor óptimo no puede ser determinado inmediatamente porque simplemente la región factible es de carácter aleatorio y dependerá del curso de determinados eventos (optimización bajo incertidumbre).

Según García (2012), “un ejemplo lo constituye la incertidumbre manifestada en la demanda, como aquella que determina los niveles de abastecimiento de un producto determinado. A este respecto, Rockafellar (2001) señala los problemas de optimización bajo incertidumbre como aquellos que se caracterizan por la necesidad de tomar decisiones sobre las cuales no se sabe qué efectos podrían causar en el futuro, lo cual implica enfrentarse a lo desconocido y las consecuencias de tales decisiones no se sabrán sino en una etapa posterior”.

Y se agrega: “Sería erróneo pensar que existe una única forma de plantear la problemática de la optimización de una determinada variable, ya que todo varía dependiendo de las características del problema a tratar, de las variables que se pongan en consideración y del medio o entorno sobre el cual se trabaje. No obstante, se pueden identificar diversos modelos que podrían ofrecer una luz en cuanto a la técnica de optimización. Se trata de identificar y analizar determinada función objetivo y de acuerdo con una región factible, observar si el problema tiene solución o no y, en caso de que la tenga, especificar cuál es. Diversos modelos se han pensado de esta manera y se proponen opciones de trabajo a este respecto.” (García, 2012)

MATERIALES Y MÉTODOS

Mediante una exploración basada en la lectura de textos y el análisis cuantitativo de los sustentos teóricos de los modelos de inventario, se estudiaron elementos constitutivos de las medidas de riesgo para modelar el concepto de incertidumbre en la búsqueda de aplicaciones a la producción sustentable en la búsqueda de una política óptima para n períodos y un artículo. Se estudiaron principalmente los modelos EOQ y AHM y la medida de riesgo *Conditional Value at Risk* (CVaR) para, finalmente, derivar en una política óptima de toma de decisiones que podría aplicarse en la producción sustentable desde un enfoque de medida de la incertidumbre. La esencia fundamental del trabajo consistió en enfocarse en los elementos que determinan un problema *well posed* en términos de optimización para su adecuación a la introducción de diversas medidas de riesgo.

DISCUSIÓN

Existen diversos modelos de inventario, entre los cuales se destaca el modelo clásico de cantidad de pedido económica (EOQ, *Economic Order Quantity*). El modelo EOQ sirve para determinar las mejores respuestas a la pregunta de cuánto y cuándo ordenar, cuando todas las variables son deterministas y se basa en la premisa de que existe un tamaño de orden óptimo con el cual se obtendrá el valor más bajo posible del costo total del inventario. Tiene diversas condiciones dependiendo del comportamiento del producto en el inventario, lo cual es central en el desarrollo del modelo. Las premisas o condiciones del EOQ son:

- La demanda por el producto por unidad de tiempo, λ, es conocida y constante.
- El tiempo de entrega (*lead time*), L, que es el tiempo total desde el proceso de la orden hasta su entrega, es conocido y constante.
- El costo unitario de las unidades ordenadas, c, es el mismo, sin importar la cantidad ordenada (no hay descuentos por cantidad).
- Los costos de ordenar, k, son conocidos y constantes.
- Cuando una orden es recibida, llegan todos los productos incluidos en esa orden y no hay demora.

Según García (2012), la certidumbre en el comportamiento de la demanda y el tiempo de entrega, el momento para hacer cada orden puede ser calculado para que quede el tiempo justo para que el agotamiento del inventario coincida con el arribo de la orden. Consecuentemente, se puede suponer entrega inmediata al cliente y ausencia de penalidad por defecto. La política de minimización de costos en este caso comprende únicamente la cantidad de unidades q que se ordena en cada pedido, la cual resulta ser constante.

Igualmente, considerando el mismo sistema EOQ, pero omitiendo el requerimiento de atención inmediata de demanda, lo cual implica un retraso en el que el cliente debe esperar cierto tiempo, se tienen políticas diferentes con punto de reorden, más conocidas como políticas de punto de reorden y cantidad de orden (Zipkin, 2000). Esas políticas comprenden el monitoreo de la posición del inventario constantemente. Cuando la posición del inventario sea igual a un valor r, conocido como punto de reorden, entonces se hace un nuevo pedido de tamaño Q en ese instante. Esta política corresponde a un modelo de la forma (Q,r). En esta política el tamaño de la orden puede ser variable ya que se ordena siempre que la posición de inventario sea menor o igual a s y se ordena una cantidad equivalente a la diferencia entre S y la posición del inventario, de tal forma que este llegue a S. En el caso de un inventario con revisión continua y cantidad de orden variable, la política (S, s) se transforma en la política (Q, r) con r como punto de orden y Q como tamaño de la orden (Zipkin, 2000, 227).

Existe otro modelo conocido como AHM (Arrow, Harris & Marschak, 1951), en el cual el monitoreo de inventario se realiza periódicamente y la política se puede considerar como (S, s), con S = s, es decir, con un punto de reorden igual al nivel de reabastecimiento objetivo, que es fijo para todos los períodos. Las figuras 1 y 2 presentan una ilustración de lo referido en este caso.

Optimización y Optimización Bajo Incertidumbre

Optimizar consiste, básicamente, en minimizar o maximizar determinado valor, sean costos, ganancias, tiempos, entre otros, teniendo en cuenta ciertas relaciones entre las variables que conforman la función que representa aquello que se desea optimizar. A esa función se le conoce como función objetivo y a las relaciones se les llama restricciones.
Cualquiera que sea la ruta elegida, siempre se estará abocado al riesgo, a la imposibilidad de predecir futuras pérdidas, siempre cabrá la posibilidad de equivocarse y es aquí donde la palabra riesgo cobra un valor fundamental, tomado desde dos perspectivas diferentes. Por un lado, concebir el riesgo como el nivel de posibilidad que tiene una decisión de generar pérdidas (o ganancias ya que se puede asumir

Figura 1. Modelo AHM sin reserva de pedidos (*non backlog*)

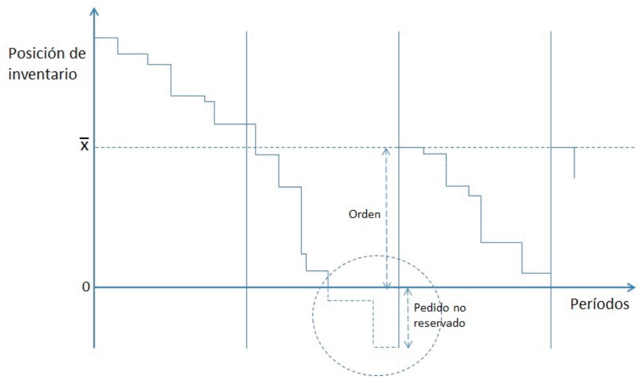
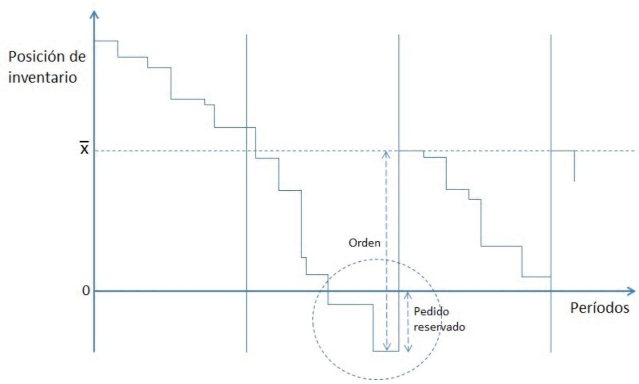


Figura 2. Modelo AHM con reserva de pedidos (*backlog*)



desde el punto de vista de riesgo de ganar). Por otro, concebir el riesgo de una decisión como la medida de su nivel de incertidumbre, es decir, una decisión tendrá mayor riesgo que otra siempre que su nivel de incertidumbre sea mayor.
Medir riesgo es equivalente a establecer una aplicación ρ entre un espacio χ de variables aleatorias esencialmente acotadas, $\chi \subseteq L^{\infty}(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$ y los reales, es decir, $\rho : \chi \rightarrow R$. Las medidas de riesgo permiten, por ejemplo, ordenar y comparar inversiones de acuerdo con su respectivo valor de riesgo.

A estas aplicaciones es necesario imponerles condiciones con el propósito de obtener definiciones con significado. Si una medida de riesgo carece de algunas de esas condiciones, ello puede conducir a dificultades mayores en su manejo matemático. Artzner et al. (1997) plantean un conjunto de condiciones deseables para una medida de riesgo. Si una medida de riesgo cumple con tales condiciones es llamada coherente.

Existen varias medidas de riesgo tales como valor condicional bajo riesgo (*Conditional Value-at-Risk*, CVaR), valor de déficit esperado (*Expected Shortfall,* ES), costo de oportunidad esperado (*Expected Regret*, ER) y la esperanza (E) que cumplen con los requisitos básicos de medida de riesgo coherente (Romero, 2005). Otras como el VaR, no cumplen con todas las propiedades de medida coherente de riesgo. Se justifica trabajar con las medidas coherentes de riesgo debido a la conveniencia de una mayor tratabilidad del problema, es decir, una mayor facilidad en los cálculos (convexidad y homogeneidad positiva).

Karlin (1960), en su artículo acerca del modelo AHM, toma la esperanza como una medida de riesgo útil para formular el problema de optimización que es de múltiples períodos. No obstante, esto puede generar dificultades ya que la esperanza como medida de riesgo permite controlar resultados promedios a largo plazo, pero podría ocurrir en alguno de los períodos una gran pérdida, equiparable con la suma de las ganancias en períodos anteriores, lo cual llevaría a una catástrofe en caso de que no se tengan las reservas suficientes (Rockafellar, 2007).

La utilidad de las medidas de riesgo es que informan las pérdidas esperadas a través de reportes financieros, de tal forma que accionistas y administradores pueden decidir si tal nivel de riesgo es aceptable o es necesario reducirlo. Además del uso de medidas de riesgo en reportes financieros, estas pueden ser usadas con una variedad de propósitos, tales como establecimiento de límites en las posiciones para los operadores, la medición de retornos sobre una base ajustada por riesgo y evaluación de modelos, etc. En este sentido, es posible considerar, por ejemplo, el nivel de riesgo esperado para procesos de producción sustentables.

Para poder resolver el problema de optimización, este debe estar bien planteado (*well-posed*). A este respecto, Rockafellar (2001) en sus notas *Optimization Under Uncertainty*, señala lo siguiente: para plantear bien un problema, se debe tener en cuenta el tipo de variable con la que se trabaja. En caso de que la variable sea determinista el problema se plantea de la siguiente manera:

Minimizar $c_0(x)$ sobre todo $x \in S$ sujeto a $c_i(x) \leq 0$ para $i = 1,...,m.$ donde $c_0(x)$ corresponde a la función objetivo y las diferentes desigualdades $c_i(x) \leq 0$ representan las restricciones bajo las cuales se debe enmarcar la solución óptima para que sea factible.

S es un conjunto de R^n compuesto de vectores de la forma $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y cada c_i es una función de S en R.

Pero ¿qué sucedería si al momento de resolver el problema y tomar decisiones, se contara con información incompleta, por ejemplo, si no se supiera la demanda en un momento determinado? Aquí ya el modelo debe ser cambiado porque se cuenta con el riesgo en la toma de las decisiones, se cuenta con una optimización bajo incertidumbre y la forma de responder a esto es más compleja. Para formular la situación que se presenta se deberá, entonces, introducir una variable adicional que represente la incertidumbre correspondiente al nivel de aleatoriedad que tiene la variable en cuestión. Entonces $c_i(x)$, se reemplaza por $c_i(x,w)$, donde w pertenece a un conjunto Ω que representa los futuros estados de la variable. De esta manera sea: $\underline{c}_i(x): w \rightarrow c_i(x,w)$ una función que toma elementos del espacio aleatorio para definir ecuaciones con variables aleatorias para $\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{m}$.

Ya con esta redefinición de las variables y las ecuaciones vale la pena preguntarse por la formulación del problema en estos términos; pues bien, no será sino reemplazar en la formulación inicial $c_i(x)$ y $c_0(x)$ por $\underline{c}_i(x)$ y $\underline{c}_0(x)$, sin embargo, aquí solamente se está representando el problema en términos de la incertidumbre y de la multiplicidad de valores que podría tomar la variable aleatoria pero no se está teniendo en cuenta el riesgo de tomar decisiones bajo incertidumbre. A este respecto, Rockafellar (2007), ilustra varios enfoques para resolver el modelo:

- Confiar en la experiencia y convertir el problema de incertidumbre en un problema determinístico, suponiendo un valor determinado $\overline{w}$ para la variable aleatoria y reemplazando $c_{\underline{0}}(x,w)$ por $c_0(x,\overline{w})$ y $c_i(x,w)$ por $c_i(x,w)$ que es, por ejemplo, lo que hace un vendedor al pronosticar cuál será la demanda durante un período determinado. Esto sería demasiado riesgoso si se equivocaran las predicciones por un margen amplio.

- Otra posibilidad sería considerar el peor caso y evitar que este suceda, lo cual es difícil ya que si bien es cierto que se elimina el riesgo, también es posible que no se puedan obtener soluciones factibles.

- También se podría tomar la esperanza como una forma de anticiparse al futuro riesgo, mirando lo que podría ocurrir en promedio, es decir, plantear:

minimizar $E[\underline{c}_0(x)]$ sobre todo $x \in S$

sujeto a $E\underline{c}_i(x) \leq 0$ para $i=1,\ldots,m$

lo cual solo es bueno si no se tienen valores demasiado extremos en las colas de las distribuciones, ya que si esto sucede, en caso de no tener una reserva adecuada, se puede llegar a incurrir en costos muy grandes. El problema de la esperanza se debe a que equilibra costos con ganancias para estimar el riesgo y no considera la dispersión de valores de las variables aleatorias.

- Se podría utilizar la desviación estándar σ de las variables aleatorias, de la siguiente manera:

minimizar $\mu(\underline{c}_0(x)\ +\lambda_0\sigma(\underline{c}_0(x)$ sobre todo $x \in S$

sujeto a $\mu(\underline{c}_i(x)\ +\lambda_i\sigma(\underline{c}_i(x)$ para $i=1,\ldots,m$

donde μ es el valor esperado y los $\lambda_i \in R^+; i=0,1,\ldots,m$ son números de ponderación. Esta idea, denominada media-riesgo, es interesante porque toma las variaciones de los datos en un intervalo determinado, no obstante su utilidad es limitada desde el punto de vista de su tratabilidad, por el hecho de que utiliza la desviación estándar.

- Utilizar restricciones de tipo probabilista tales como $prob\{\underline{c}_i(x) \leq 0\} \geq \alpha_i$ para $i = 1,\ldots,m$.

RESULTADOS

Se propone una aproximación general a la incertidumbre de la siguiente manera: para cada $i = 0,1,\ldots,m$, se selecciona una medida de riesgo, $\rho_i : L^2(\Omega,\Sigma,P) \to (-\infty,\infty]$ que cuantifique el riesgo de pérdida. Se reemplazan las variables aleatorias $\underline{c}_i(x)$ por las funciones $\bar{c}_i(x) = \rho_i(\underline{c}_i(x)$ y el problema se transforma entonces en:

minimizar $\bar{c}_0(x)$ sobre todo $x \in S$

sujeto a $\bar{c}_i(x) \leq 0$ para $i = 1,\ldots,m$.

Es así, como se puede utilizar la medida de riesgo para tomar decisiones en incertidumbre con el fin de obtener soluciones factibles y coherentes, la medida en cuestión debe ser coherente.

Algunas medidas de riesgo son la esperanza, el VaR (*Value at Risk*) y el CVaR (*Conditional Value at Risk*). El VaR se define de la siguiente forma:

$$VaR_\alpha(X) = inf\{z/F_X(z) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha)$$

donde $\alpha \in (0,1)$ y F_X^{-1} es la función inversa generalizada de F_X.

Si F_X es diferenciable y estrictamente creciente en su soporte, el CVaR es definido de la siguiente manera:

$$CVaR_\alpha(X) = E[\xi/\xi > VaR_\alpha(X)] = \frac{1}{1-\alpha}\int_{VaR_\alpha(X)}^{\infty} \xi dF_X(\xi),$$

que expresa el valor esperado de la variable condicionada a la cola α, que toma en cuenta la dispersión de la variable a partir de $VaR_\alpha(X)$. En caso de que F_X no cumpla con las condiciones anteriormente descritas, puede consultarse cómo tratar dicha problemática en el artículo *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions* (Rockafellar & Uryasev, 2001).

A este respecto, se puede identificar que el nivel de riesgo puede relacionarse con el nivel de apropiación de la política de sustentabilidad del tomador de riesgos.

Política de toma de decisiones y órdenes estocásticos

Los órdenes estocásticos son relaciones de orden parcial entre distribuciones de probabilidad. Ellos son ampliamente utilizados en probabilidad, estadística y procesos estocásticos y en aplicaciones a la investigación de operaciones, economía, finanzas, física matemática y otras disciplinas (Müller & Stoyan, 2002; Mosler & Scarsini, 1991; (Shaked & Schantikumar, 1994). El estudio sistemático de los órdenes estocásticos es una actividad relativamente joven, intensificada en las últimas tres décadas, no obstante que algunos resultados datan de casi un siglo atrás. Se pueden mencionar los documentos de Lorenz (1905), Hardy, Littlewood & Polya (1929) y Karamata (1932).

Los primeros tratamientos comprehensivos de los órdenes estocásticos fueron dados por Stoyan (1973 y 1983). Para ver citas a estas referencias ver Bulinskaya (2004). Los órdenes estocásticos permiten, entre otras aplicaciones, realizar comparaciones entre óptimos que corresponden a diferentes distribuciones de demanda:

Si $x_1(\psi_1, \psi_2, \ldots)$ y $x_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ son dos valores óptimos para el modelo con distribuciones de demandas φ_i y ψ_i diferentes, normalmente no se pueden hacer comparaciones entre ellos. Sin embargo, bajo el supuesto de que las respectivas distribuciones estén estocásticamente ordenadas, se pueden establecer ciertas relaciones entre los óptimos. Vale la pena mencionar tres órdenes estocásticos:

- Orden estocástico usual (st): la variable aleatoria X es menor respecto a la variable aleatoria Y con respecto al orden estocástico usual ($X \leq_{st} Y$) si $F_X(t) \geq F_Y(t)$.

  En particular, ello significa que demandas basadas en la función de distribución F_X tienen una mayor probabilidad de tomar valores pequeños que aquellos basados en la función de distribución F_Y, (Karlin, 1960).

- Orden convexo (cx): $X \leq_{cx} Y$, si $E_f(X) \leq E_f(Y)$ para todas las funciones convexas f para las que la esperanza exista.

- Orden convexo creciente (icx): $X \leq_{icx} Y$, si $E_f(X) \leq E_f(Y)$ para todas las funciones convexas crecientes f para las que la esperanza exista.

Teniendo en cuenta la medida coherente de riesgo con la cual se trabaje, es posible establecer relaciones entre óptimos utilizando diferentes funciones de densidad de probabilidad de las demandas (para nuestro caso). A este respecto Karlin (1960) estudia relaciones entre dos números críticos (óptimos) que corresponden a sucesiones distintas de densidades de probabilidad asociadas a los períodos, partiendo de que las respectivas demandas aleatorias estén estocásticamente ordenadas. Un resultado importante en este sentido es que si $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ y $\bar{x}(\psi_1, \psi_2, \ldots)$ son óptimos para dos sucesiones de funciones de densidad de probabilidad diferentes y si además $\varphi_i \leq_{st} \psi_i$ entonces, donde $\bar{x}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ es el nivel óptimo del inventario inicial mínimo en el período correspondiente.

Resultados como este ofrecen un amplio campo acerca de la posibilidad de toma de decisiones referentes a distintos mercados. De esta manera, las comparaciones estocásticas posibilitan el análisis de óptimos y de cotas para ellos, en lo cual la medida de riesgo utilizada es importante. Los órdenes estocásticos permiten relacionar entre sí variables aleatorias y sus respectivas distribuciones así como los resultados de su aplicación a determinados modelos.

CONCLUSIONES

Los modelos de inventario pueden ser ampliamente estudiados desde diversas ópticas, permiten analizar las políticas de toma de decisiones, sea en caso determinista o no determinista.

Es posible establecer condiciones sobre el modelo de inventario siempre que este esté bien planteado *(well-posed)* y el problema de la incertidumbre sea afrontado con una medida coherente de riesgo, el análisis de algunos tratamientos para escenarios que no cumplen con tales condiciones se proponen como elementos futuros de investigación.

La toma de decisiones bajo incertidumbre en modelos de inventario involucra el hecho de reconocer las variables y su interrelación con la medida de riesgo, la cual, según la aversión al riesgo del tomador de decisiones deberá ser más o menos robusta.

Es posible establecer ordenaciones de valores óptimos para modelos de inventario con distintas cadenas de distribución de demanda utilizando el orden estocástico usual, análisis de otros órdenes son materia de análisis.

El modelo de inventario AHM bajo condiciones de pérdida derivadas de la medición del factor de retorno relacionado con el factor α de la medida de riesgo CVaR permite incluir una política óptima relacionada con procesos de producción sustentable.

REFERENCIAS

Arrow, K.; Harris, T. & Marschak, J. (1951). Optimal inventory policy. *Econometrica 19* (3), 250-261.

Artzner, P.; Delbaen, F.; Eber, J. & Heath, D. (1997). Thinking coherently. *Risk, 10* (11), 33-49.

Bulinskaya, E. (2004). Stochastic orders and inventory problems. *International Journal of Production Economics, 84,* 125-135.

García A., D. A. (2012). Modelo de inventario AHM utilizando CVaR. Medellín: Universidad EAFIT.

Hardy, G.; Littlewood, J. & Polya, G. (1929). Some simple inequalities satis_ed by convex functions. *Messenger Mathematics, 58,* 145-152.

Karamata, J. (1932). Sur une inégalité relative aux fonctions convexes. *Publications Mathématiques de l`Université Belgrade, 1,* 145-148.

Karlin, S. (1960). Dynamic inventory policy with varying stochastic demands. *Management Science, 3* (3), 231-258.

Lorenz, M. (1905). Methods for measuring the concentration of wealth. *Journal of the American Statistical Association, 9*, 209-219.

Mosler, K. & Scarsini, M. (1991). *Stochastic Orders and Decision under Risk*. Lecture Notes-Monograph Series, Vol. 19. CA: Institute of Mathematical Statistics.

Müller, A. & Stoyan, D. (2002). *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. Chichester: John Wiley & Sons.

Rockafellar, R. (2001). Optimization under uncertainty. Dept. of Mathematics University of Washington. Recuperado de: http://www.math.washington.edu/~rtr/uncertainty.pdf

Rockafellar,R & Uryasev, S. (2001). *Conditional Value-at-Risk for general loss distributions.* Dept. of industrial and System Engineering. Research Report.

Rockafellar, R. (2007). Coherent approaches to risk in optimization under uncertainty. Tutorials in operations research.

Romero, R. (2005). Medidas de riesgo financiero. *Economía y administración, 149* (2), 57-63.

Scarf, H. (1960). The Optimality of (S, s) Policies in the Dynamic Inventory Problem. In K. J. Arrow, S. Karlin & P. Suppes (eds.). *Mathematical Methods in the Social Sciences 1959.* (196-202). Stanford University Press.

Shaked, M. & Schantikumar, J. (1994). Stochastic Orders and their Applications. Academic Press, New York

Stoyan, D. (1983). *Comparison Methods for Queues and other Stochastic Models.* New York: Willey.

Zipkin, P. (2000). *Foundations of Inventory Management.* New York: McGraw-Hill Higher Education.