Artículo original

El método de máximos y mínimos de Fermat

Andrés de la Torre Gómez[1]/ Carlos Mario Suescún Arteaga[2] / Sergio Alberto Alarcón Vasco[3]

Grupo de Investigación Aplicada en Medio Ambiente GAMA y Semillero de investigación en Gestión y Medio Ambiente SIGMA.

Fermat´s maximums and minimums method

Resumen:

Introducción: En el siglo XVII, Fermat desarrolla el primer método general para la determinación de máximos y mínimos, en la memoria *Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum,* se trata de un procedimiento puramente algorítmico desprovisto de todo fundamento demostrativo, en el cual Fermat introduce la técnica de *adigualdad,* que había sido empleada por Diofanto en la Escuela de Alejandría. La forma vaga y lacónica como Fermat presenta el *Methodus*, ha dado pie a algunas interpretaciones en términos de Cálculo infinitesimal, una de las cuales afirma que en el *Methodus* subyace el cálculo una derivada que se iguala a cero. **Objetivo:** Realizar un estudio detallado de la forma como Fermat explica en el *Methodus* su método de máximos y mínimos y discutir las anacrónicas interpretaciones que han dado algunos estudiosos de su método. **Métodos:** Con base en los textos referenciados en la bibliografía se hace un escrutinio histórico cuyo fin primordial es estudiar y analizar el método expuesto por Fermat. **Resultados:** Se logra hacer un estudio detallado del método empleado por Fermat, se aplica el método para la obtención de un máximo en el problema de la división del segmento y por último se analizan las interpretaciones que de el han dado algunos estudiosos del tema según la mirada de hoy. No obstante, afirmaciones como las expuestas por dichos estudiosos del tema deben tomarse con cautela, ya que fuerzan el método expuesto por Fermat.

Palabras clave: Fermat. Máximos. Mínimos. Adigualdad. *Methodus.* Derivada. Cálculo infinetisimal. Tangente.

Abstratc

Introduction: In the XVII Century, Fermat d/eveloped the first general method to determine the minimums and maximums, in the memory *Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum*, being a purely algorithmic procedure with no demonstrative foundation at all, and in which Fermat introduces the adequality technique, previously used by Diofantus in the Alexandria School. The vague and laconic way in which Fermat showed the Methodus has generated some interpretations under infinitesimal calculus terms, and one of them says that in the Methodus sub lies the calculation of a derivation that equals zero. **Objective:** To make a detailed study of the way Fermat explains his maximums and minimums method in the Methodus and discusses the anachronism interpretations given by some experts about his method. **Methods:** Based on the texts mentioned in the bibliography we make a historical scrutiny with the main objective of studying and analyzing the method showed by Fermat. **Results:** The detailed study is made, the method is applied to obtain a minimum in the problem of the segment division and the interpretations given by some experts are analyzed under the current standards. These interpretations must be seen carefully, because they force the method showed by Fermat.

Key words: Fermat. Maximums. Minimums. Adequality. *Methodus.* Derivation. Infinitesimal calculus. Tangent.

1 Doctor en Ciencias Matemáticas, Magíster en Ciencias Matemáticas y Matemático, coordinador del grupo de Educación Matemática e Historia de la Universidad de Antioquia-EAFIT. / 2 Magíster en Educación Matemática y Licenciado en Educación Matemática y Física. Profesor de la Facultad de Ingenierías Corporación Universitaria Lasallista. / 3 Magíster en Educación Matemática y Matemático. Profesor del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín y profesor de cátedra de la Universidad de Antioquia

Correspondencia: Carlos Mario Suescún Arteaga. e-mail: casuescun@lasallista.edu.co

Fecha de recibo: 7/11/2005; fecha de aprobación: 21/02/2006

Introducción

Hacia el año 1636 circuló en Francia una memoria de Fermat titulada *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* ("Método para investigar máximos y mínimos"), cuya importancia radica en que, además de ser el primer método general conocido para determinar máximos y mínimos, presentaba la idea de dar un incremento a cierta magnitud, la cual tomaba así el aspecto de una variable. Por su aporte al desarrollo del concepto de límite, analizaremos este texto y algunas interpretaciones anacrónicas que se le dan hoy, según las cuales en el *Methodus* subyace el cálculo de una derivada que se iguala a cero.

A continuación transcribiremos parte de la memoria del *Methodus*, lo cual se hará respetando la secuencia del contenido, pero separándolo en párrafos para facilitar su estudio y análisis. Fermat se expresa con estas palabras:

"Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

1. Sea *"a"* una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).

2. Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de *"a"* en términos que pueden ser de cualquier grado.

3. Se sustituirá a continuación la incógnita original *"a"* por *" a+e"*, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de *"a"* y *"e"*, en términos que pueden ser de cualquier grado.

4. Se "adigualarán", para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.

5. Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de *"e"* o de una de sus potencias.

6. Se dividirán todos los términos por *"e"*, o por alguna potencia superior de *"e"*, de modo que desaparecerá la *"e"* de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.

7. Se suprimirán a continuación todos los términos donde todavía aparece la *"e"* o una de sus potencias y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada se igualarán, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.

8. La resolución de esta última ecuación dará el valor de *"a"*, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original." [1]

Fermat emplea el simbolismo literal introducido por Vieta, que consistía en el uso exclusivo de letras mayúsculas: Las vocales, para las incógnitas, y las consonantes, para las cantidades conocidas. Es importante aclarar que al transcribir parte de la memoria del *Methodus* respetamos el texto como lo tradujo González Urbaneja, el cual emplea letras minúsculas.

La idea de "hacer adiguales" dos expresiones, como las mencionadas en la etapa 4 de la regla anterior, proviene de Diofanto. Boyer entiende la "adigualdad" como una pseudo-igualdad que llega a ser igualdad cuando *E* se hace cero, e introduce el vocablo inglés *pseudo-equality* para traducir el término latino *adaequalitas*, que es el usado por Fermat en su texto.[2] Andersen, por su parte, interpreta "hacer adiguales" dos expresiones con el significado de hacerlas tan aproximadamente iguales como sea posible.[3]

En algunos ejemplos, resueltos por Fermat, la cantidad máxima ó mínima en consideración contenía una raíz cuadrada. En esas situaciones, Fermat elevaba al cuadrado la adigualdad antes de aplicar las últimas etapas de su regla y, en particular, al aplicar la etapa 6, dividía todos los términos por una misma potencia de *E*, escogiendo ésta de manera que al menos uno de los términos resultantes no contuviera *E*.

Métodos

Se hace un escrutinio histórico con el fin de estudiar y analizar el método expuesto por Fermat para la determinación de máximos y mínimos. Dicho método es aplicado en el problema de la división del segmento y permite observar la forma como Fermat introduce la técnica de *"adigualdad"*. Dicha técnica permite ignorar o suprimir aquellos términos que aún contengan la cantidad E, y finalmente posibilita la determinación de un máximo. Por último se analizan las interpretaciones que de el han dado algunos estudiosos del tema según la mirada de hoy. La mayor parte de la información aquí suministrada se obtuvo en los textos referenciados en la bibliografía.

Resultados

El problema de la división del segmento

Fermat escogió, para ilustrar su método, el problema de dividir un segmento dado en dos partes de tal manera que el producto de las longitudes de éstas sea un máximo. Sea B, la longitud del segmento dado y A, la de la primera parte, como se muestra en la figura 1.

Es necesario hacer máxima el área del rectángulo de la figura 2, es decir, la cantidad $A\,(B-A)$.

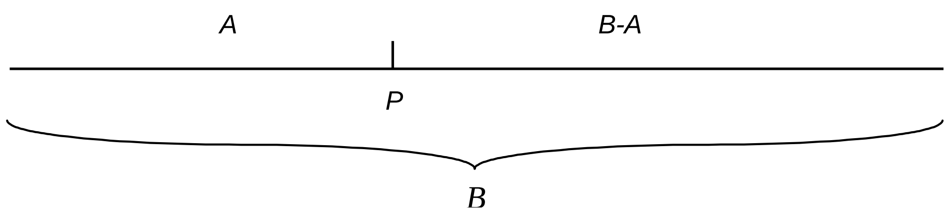

Figura 1

Figura 2

La solución del problema era bien conocida: el valor $A = \frac{B}{2}$ hace que la cantidad $A(B-A)$ sea un máximo.

El desarrollo paso a paso, apelando a la regla propuesta por Fermat, es como sigue:

1. Se identifica con A la incógnita del problema.

2. La cantidad máxima es $A(B-A)$, la cual, desarrollada en potencias de A, da:

$$AB - A^2 \qquad (1)$$

3. Se sustituye, en la cantidad $A(B-A)$, A por $A+E$ en (1), con lo cual obtenemos $(A+E)[B-(A+E)^2]$, que, desarrollada en potencias de A y E, da:

$$AB + BE - 2AE - A^2 - E^2 \qquad (2)$$

4. Se hacen "adiguales" las dos expresiones de la cantidad máxima, dadas en (1) y (2), así:

$$AB + BE - 2AE - A^2 - E^2 \sim AB - A^2$$

donde el símbolo ~ representa la adigualdad.

5. Se eliminan los términos comunes y se obtiene:

$$BE - 2AE - E^2 \sim 0$$

6. Se dividen todos los términos por E para obtener:

$$B - 2A - E \sim 0$$

7. Se ignoran los términos que aún contengan E, lo que dará:

$$B - 2A \sim 0$$

Las cantidades restantes se hacen iguales para llegar a la expresión

$$B - 2A = 0$$

8. La resolución de esta última ecuación dará el valor , que hace que la cantidad $A (B-A)$ sea un máximo.

Según explica Fermat en el *Syncriseos et anastrophes,* que data aproximadamente de 1640, el procedimiento para calcular máximos y mínimos se le ocurrió al observar que, si el segmento de longitud B es dividido por un punto P en dos partes de longitudes A y B-A, entonces hay en general dos posiciones de P para las cuales el producto $A(B\text{-}A)$ es igual a una cantidad dada Z. El valor máximo de dicho producto es $\frac{B^2}{4}$, valor para el cual hay solo una posición de P, a saber, el punto medio del segmento dado, tal como lo había establecido Pappus.

Fermat analiza la ecuación

$$X (B-X) = Z \qquad \textbf{(1)}$$

la cual tiene dos raíces, que denota por A y E, cuando $z < \frac{B^2}{4}$

Haciendo uso de la teoría de ecuaciones de Vieta, Fermat obtiene sucesivamente las expresiones $A (B-A) = E (B-E)$, $AB - A^2 = EB - E^2$, $BA - BE = A^2 - E^2$ y $B(A-E)=(A-E)(A+E)$. Dividiendo la última expresión por A-E, llega a

$$B = A+E \qquad \textbf{(2)}$$

Entre más próximo esté Z de $\frac{B^2}{4}$, la diferencia entre A y E será menor, y finalmente, cuando $Z= \frac{B^2}{4}$, se tendrá A igual a E y, en (2), $B=2A$, que es la solución única que da un valor máximo del producto. Así, para hallar la cantidad máxima se hace necesario igualar las raíces A y E.

Con el fin de evitar las dificultades de la división por A-E Fermat decidió tomar las dos raíces de (1) como A y $A+E$, y dividir por E. Al final, para igualar las raíces A y $A+E$, hizo $E=0$

El recurso de hacer $E=0$ conduce a los mismos resultados que la instrucción dada por Fermat en la etapa 7 de su regla, en la cual pide ignorar o suprimir aquellos términos que todavía contengan a E. Cuando se aplicaba el procedimiento de Fermat era de común usanza hacer explícitamente $E=0$ al final del proceso, a pesar de que en las etapas iniciales del mismo se pide dividir por E, lo que exige $E \neq 0$. El método funcionaba en la práctica y permitió resolver numerosos problemas de máximos y mínimos, a pesar de la incongruencia que hemos señalado, la cual, al decir de Andersen, se convirtió en una *"espina clavada en el costado del matemático"*. [4] Debido a la eficacia práctica del método de máximos y mínimos y a pesar del defecto que hemos señalado, Fermat lo aplicó a la solución de problemas de otros campos, como la determinación de los centros de gravedad de diferentes figuras geométricas o la construcción de la tangente a una curva en un punto dado de esta.

$A =$

Fermat extendió su método también a la óptica: asumiendo que un rayo de luz que pasa de un medio a otro sigue siempre el camino más rápido (lo que hoy se conoce como el principio del tiempo mínimo de Fermat), usó el método para determinar el camino en el que la luz emplea el mínimo tiempo. Fermat demostró finalmente que su principio del tiempo mínimo implicaba la ley de la refracción que Snell había establecido en 1619.

Características del método

A continuación resaltamos algunas características del método de Fermat:

1) El método da una condición necesaria para los máximos y mínimos, pero esa condición no es suficiente y tampoco permite distinguir un máximo de un mínimo.
2) El procedimiento es puramente algebraico y algorítmico, no geométrico.
3) El método de máximos y mínimos de Fermat no implica, en principio, el concepto de límite.

Podría preguntarse cuán cerca estuvo Fermat de la noción de derivada. Obsérvese, en primer lugar que, sí en las etapas 2 y 3 denotara la cantidad máxima ó mínima por *f(A)* y *f(A+E)*, se tendría *f(A+E) ~f(A)* en la etapa 4. En la etapa 5, se podrían eliminar los términos comunes y poner *f(A+E) ~f(A)*~0. En la etapa 6, se dividiría por *E* para obtener $\frac{f(A+E)-f(A)}{E}$ ~0 En la etapa 7, se eliminarían los términos que todavía contienen *E*, ó bien haría *E=0,* y se obtendría la expresión

~ 0

Al resolver, finalmente, la ecuación

$$\left(\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right)_{E=0}$$

$$\left(\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right)_{E=0} = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Se obtendrían, los valores de *A* que corresponden a máximos ó mínimos de *f(A)*.

Si, inducidos a ello por la mirada de hoy, se interpretara la expresión dada por

$$\left(\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right)_{E=0}$$

en el sentido de tomar el límite cuando $E\to 0$, entonces se tendría

$$\lim_{E\to 0}\frac{f(A+E)-f(A)}{E} = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

En lugar de (3), y la solución de (4) daría los valores de A para los cuales *f(A)* es máximo ó mínimo.

Si, con el ánimo de insistir en una notación como la que se emplea hoy, se hiciera *A=x* y *E=Δx*, la ecuación (4) quedaría

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

Se sabe que, si dicho límite existiera, sería igual a la derivada *f'(x)* y se tendría la expresión

f'(x)=0 **(6)**

Podría afirmarse, entonces, como lo haría un estudiante de hoy, situado en otro contexto teórico, que las soluciones de la ecuación (6) dan los valores de x para los cuales *f(x)* es máximo ó mínimo relativo. Afirmaciones como esta se encuentran, con frecuencia, en los textos de historia de las matemáticas.

Eves, por ejemplo, dice: *Aunque la lógica de la exposición de Fermat deja mucho que desear, se ve que su método es equivalente a establecer que*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$$

Es decir, que la derivada de *f(x)* es igual a cero. Este es el método acostumbrado para encontrar los máximos y mínimos ordinarios de una función *f(x)* y a él se refieren a veces nuestros libros de texto elementales como el método de Fermat.[5]

Más recientemente puede encontrarse en la Internet el siguiente texto que aparece respaldado por el Ministero dell' Istruzione, dell' Universitá e della Recerca. Laboratorio a distanza MATMEDIA. Servizio per l' insegnamento / apprendimento della Matematica. Universitá degli studi di Napoli.

"L'invenzione del calcolo diferénciale

Gli storici non sono concordi nello stabilire "chi per primo" abbia formulato un procedimento che possa essere considerato la prima forma di derivazione.

C'è chi attribuisce al matematico René Francois de Sluse (1622-1685), nato nei Paesi Bassi, tale primato in virtù di una regola, trovata nel 1652, per determinare la tangente ad una curva di equazione f(x,y)=0 con f polinomio. Tale regola, rimasta inedita fino al 1673, può essere così formulata: la sottotangente sarà il quoziente *ottenuto ponendo al numeratore tutti i termini contenenti la y, moltiplicati ciascuno per l'esponente della potenza di y che compare in essa, e ponendo al denominatore tutti i termini contenenti la x, moltiplicati ciascuno per l'esponente della potenza di x che compare in essa e poi divisi per x. Ciò equivale, diremmo oggi, a scrivere yfy/fx, così che la sottotangente risulta t= ydx/dy, partendo dall'uguaglianza* $f_x d_x = -f_y dy$.

C'è chi, invece, risale al già più volte citato Pierre de Fermat che, nel suo trattato Methodus ad disquirendum maximam et minimam del 1637, elaborò un metodo brillante per individuare i punti in cui una funzione assume un valore massimo o minimo. Infatti il matematico confrontò il valore della funzione f(x) in un certo punto di ascissa x con il valore f(x+e) in un certo punto di ascissa x+e molto vicino ad x. In generale questi due valori sono diversi, ma nel punto più alto o più basso di una curva la loro differenza sarà quasi impercettibile: pertanto per determinare i punti di massimo e minimo Fermat uguagliò f(x) a f(x+e). Quanto più piccolo è l'intervallo "e" tra i due punti tanto più la pseudo-uguaglianza si avvicina all'uguaglianza, per cui, una volta diviso il tutto per "e", il matematico pose e=0. Questo procedimento, diremmo oggi, non è niente altro che il calcolo del limite per "e" che tende a 0 del rapporto incrementale

$$\frac{f(x+e)-f(x)}{e}$$

uguagliato a 0: quello che noi a tutt'oggi facciamo!!"[6]

Presentamos a continuación nuestra versión al castellano del texto anterior.

"La invención del cálculo diferencial

Los historiadores no están aún de acuerdo en establecer "quién fue el primero" en formular un procedimiento que pueda ser considerado la primera forma de derivación.

Algunos le atribuyen al matemático René Francois de Sluse (1622-1685), nacido en los Países Bajos, tal primacía en virtud de una regla, hallada en 1652, para determinar la tangente a una curva de ecuación *f(x,y)=0* con *f* polinomio. Tal regla, inédita hasta finales de 1673, pudo ser formulada de esta manera: La subtangente será el cociente obtenido al poner el numerador en términos que contengan la *y*, multiplicando cada uno por el exponente de la potencia de *y* que allí aparezca, y poniendo el denominador en términos que contengan la *x*, multiplicando cada uno por el exponente de la potencia de x que allí aparezca y después dividir por *x.* Esto equivale, diremos hoy, a escribir de esta manera, la subtangente resulta $t = y\frac{dx}{dy}$, a partir de la igualdad $f_x dx = f_y dy$.

Otros, por el contrario, se remontan al ya muy citado Pierre de Fermat que, en el tratado Methodus ad disquirendum maximam et minimam de 1637, elaboró un método brillante para localizar un punto en el cual una función toma un valor máximo o mínimo. En efecto, el matemático confrontó el valor de la función *f(x)* en un cierto punto de abscisa *x* con el valor *f(x+e)* en un cierto punto de abscisa *x+e* muy cercano a *x*. En general estos dos valores son distintos, pero en un punto más bajo o más alto de una curva sus diferencias serán casi imperceptibles: Por tanto, para determinar los puntos de máxima y mínima, Fermat igualó *f(x)* a *f(x+e)*. Cuanto más pequeño es el intervalo "e" entre los dos puntos tanto más la *seudo-igualdad* se aproxima a la igualdad, por lo cual, una vez dividido todo por *"e"*, el matemático hace *e=0*. Este procedimiento, diremos hoy, no es otra cosa que el cálculo del límite cuando e tiende a cero de la relación incremental

$$\frac{f(x+e)-f(x)}{e}$$

Igualado a *0*: aquello que todos hoy hacemos!!"

Discusión

No obstante, afirmaciones como las anteriores deben tomarse con cautela, ya que fuerzan el método expuesto por Fermat y lo interpretan según la mirada de hoy. Conviene tomar en consideración los siguientes aspectos:

1. Fermat no tiene clara la noción de variable independiente, como se tiene hoy. Él da un significado a una ecuación algebraica en dos incógnitas, las cuales concebía como segmentos; la primera se mide, a partir de un punto inicial a lo largo de un eje dado, mientras que los segmentos correspondientes que representan la otra incógnita siendo determinados por la ecuación dada se levantan como ordenadas formando un determinado ángulo con el eje. De esta forma, la geometría desarrollada bajo este principio será una *geometría de ordenadas* más que una *geometría de coordenadas.*

2. Fermat no pensaba en funciones si no en cantidades. De hecho él habla de "cantidad máxima o mínima", no de una función que debe asumir su valor máximo o mínimo.

3. Para Fermat *E* no es un incremento infinitesimal ni una magnitud pequeña. Las raíces de su método de su método de máximos y mínimos se encuentran en el dominio de lo finito algebraico de la teoría de ecuaciones de Vieta, y aunque la idea la idea de cambio de variable (transito desde *A* hasta *E*) mediante el incremento *E* se desprende del *Methodus.* La naturaleza de *E* como variable algebraica finita evitó a Fermat en el tema de máximos y mínimos el transito de lo finito a lo infinito.

4. El método no supone inicialmente ningún concepto de límite, es puramente algebraico. Para Fermat la *E* no es que tienda a cero, pues si observamos la etapa 7 de su regla, él lo que hace es eliminar los términos que aún contienen *E*, ó bien hace *E=0*. De acuerdo con González Urbaneja[7], el verbo latino *evanescere,* utilizado por Fermat toma el significado de desaparecer. Es solo hasta Newton que este verbo toma el significado matemático de aproximarse a un límite (*"razones únicas de cantidades evanescentes"*).[8]

5. El método en la etapa 6, permite dividir por potencias superiores de *E*, cosa que no ocurre en la definición actual de derivada.

6. Fermat no hace ninguna referencia a que el método de solo una condición suficiente.

Agradecimientos

Este trabajo se enmarca en el proyecto de investigación "Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite", COLCIENCIAS 1115-1112704, y en la tesis "El obstáculo epistemológico euclidiano en la construcción del concepto de tangente" del programa de Maestría en Educación, con énfasis en docencia de las matemáticas, de la Universidad de Antioquia en convenio con la Universidad EAFIT. Tanto el proyecto de investigación como la tesis de maestría aquí, mencionadas fueron dirigidas por el Doctor Andrés de la Torre Gómez, coordinador del grupo de Educación Matemática e Historia (Universidad de Antioquia - EAFIT), Conciencias 2000.

Referencias bibliográficas

1. GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII. Madrid: Alianza Editorial S.A; 1992. p. 143-144.

2. BOYER, CarL B. The History of Calculus and its Conceptual Development (the Concepts of the Calculus). New York: Dover; 1949. p. 156.

3. GRATTAN - GUINNES, I. Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630 - 1910: Una introducción histórica. Madrid: Alianza Editorial; 1984. p. 38.

4. GRATTAN - GUINNES, I. Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630 - 1910: Una introducción histórica. Madrid: Alianza Editorial; 1984. p. 41.

5. EVES, H. An Introduction to the History of Mathematics. New York: Holt, Rinehart and Winston; 1969. p. 326.

6. LABORATORIO A DISTANZA MATMEDIA. UNIVERSIDAD DE NAPOLI. L´invenzione del calcolo diferénciale. [Fecha de acceso: 4 de marzo de 2004] URL disponible en: http://143.225.237.3/Antologia/I%20grandi%20momenti/invenzione%20del%20calcolo%20differenziale/invenzione_del_calcolo_differenz.htm

7. GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro M. Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII. Madrid: Alianza Editorial S. A.; 1992. p. 152.

8. NEWTON. Isaac. Principios matemáticos de la filosofía natural. Barcelona: Altaza; 1993. p. 72